Mathématiques

29/1/2015 **D11S** 3h30

Problème : Datation au carbone 14

D'un point de vue physique, l'atome de carbone 14 est un isotope radioactif du carbone 12. Son noyau est composé de six protons et de huit neutrons, à la différence du carbone 12 qui ne compte que six neutrons. Cet élément est présent en quantité constante dans l'atmosphère car en régénération perpétuelle sous l'action des rayons cosmiques sur les atomes d'azote présents dans l'atmosphère.
La Terre est bombardée en permanence par des particules très énergétiques venant du cosmos. Ce rayonnement cosmique est composé notamment de protons très rapides. Les noyaux des atomes présents dans l'atmosphère «explosent» littéralement sous le choc de ces protons très énergétiques et, parmi les fragments, on trouve des neutrons très rapides. Ces neutrons rapides peuvent à leur tour réagir avec des noyaux d'azote de la haute atmosphère. Lors du choc, tout se passe comme si un neutron rapide éjectait un des protons d'un des noyaux d'azote et prenait sa place pour former un noyau comptant six protons et huit neutrons. Ce noyau est un isotope particulier du carbone, le carbone 14, qui est radioactif : en émettant un électron et une particule non observable, l'antineutrino, il se décompose en un noyau d'azote comptant sept protons et sept neutrons.

1 re Partie : Modélisation de la désintégration

Dans la suite de ce texte, nous ne cherchons pas à décrire outre mesure le processus de régénération du carbone 14 dans l'atmosphère ni son absorption dans la chaîne du vivant. En revanche, nous visons à modéliser précisément le phénomène de désintégration de l'atome.
Dans ce contexte, voici comment les auteurs d'un ouvrage de physique à destination du grand public explique au lecteur le phénomène radioactif : *«La probabilité qu'un atome radioactif, présent dans une source donnée à un instant t, se désintègre durant un court intervalle de temps dt suivant cet instant t est proportionnelle à la durée de l'intervalle dt considéré.»*

Essayons d'interpréter ce résultat en termes probabilistes. Désignons pour cela par T la variable modélisant la durée de vie de l'atome, c'est-à-dire, la durée séparant sa création de sa désintégration.
Nous supposons T définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

1°) On se place à un instant t où l'atome ne s'est pas désintégré. Expliquer pourquoi les propos précédents peuvent s'écrire :

$$\mathbf{P}_{[T>t]}\big(T \in]t, t+h]\big) \underset{h\to 0^+}{\sim} \lambda h$$

pour une certaine constante $\lambda > 0$.

2°) En désignant par F la fonction de répartition de la variable aléatoire T, en déduire :

$$\forall t \geqslant 0,\ \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \lambda(1-F(t)).$$

3°) En déduire que la fonction de répartition est dérivable à droite.
Des arguments physiques nous permettent en fait d'affirmer que F est dérivable.
Former une équation différentielle vérifiée par F et en déduire que :

$$\forall t \geqslant 0,\ F(t) = 1 - \exp(-\lambda t).$$

4°) Reconnaître la loi de T et donner son espérance et sa variance.

5°) Montrer qu'il s'agit donc d'un phénomène sans mémoire : c'est-à-dire :

$$\forall t > 0,\ \forall s > 0, \mathbf{P}_{[T>t]}\big(T > t+s\big) = \mathbf{P}(T > s)$$

6°) Ecrire une fonction `desintegre(lam)` qui simule la durée de vie d'un atome de carbone.

7°) On appelle dans ce cadre **demi-vie** la médiane de T, c'est-à-dire le temps noté $t_{1/2}$ défini par :

$$\mathbf{P}(T \leqslant t_{1/2}) = \mathbf{P}(T \geqslant t_{1/2}) = \frac{1}{2}$$

Déterminer $t_{1/2}$ en fonction de λ.
Des mesures physiques donnent $t_{1/2} = 5730$ ans. Vérifier qu'on a alors : $\lambda = 3,8.10^{-12}s^{-1}$. On dit que λ *est la constante de radioactivité.*

Remarque:
On considèrera dans toute la suite du problème que la durée de vie des atomes de Carbone 14 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3,8.10^{-12}s^{-1}$.

2 $^{\text{e}}$ Partie : Etude de la teneur en Carbone 14

La régénération perpétuelle du carbone 14 dans l'atmosphère et de son incorporation dans la chaîne du vivant nous apprend que la teneur en carbone 14 dans les organismes vivants est constante, égale à $6,8.10^{10}$ atomes de carbone 14 par gramme de carbone. A l'opposée, le métabolisme disparaissant, le carbone 14 présent dans un organisme mort n'est plus renouvelé et se désintègre petit à petit en atomes d'azote. Dans cette perspective, cette partie vise à étudier le processus stochastique décrivant les désintégrations successives de carbone 14 survenant dans une masse macroscopique de matière devenue inerte. L'organisme mort contient alors un très grand nombre de particules de carbone 14, et nous ferons l'hypothèse, raisonnable, qu'elles se désintègrent indépendamment les unes des autres. La loi de modélisation de la durée de vie d'un atome de carbone 14 étant, d'après la première partie, de type exponentielle, tout se passe comme si tous les atomes de carbone 14 présents au moment de la mort de l'organisme étaient créés à cet instant même.

On numérote les atomes de carbone 14 de l'échantillon, et on note T_i la durée de vie de l'atome numéro i qui suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.
On note N le nombre total d'atomes au début de l'étude.
On définie $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ les variables aléatoires obtenues en réordonnant par ordre croissant les variables aléatoires (T_i). Ainsi en particulier : $Z_1 = \min(T_1, \dots, T_N)$ et $Z_N = \max(T_1, \dots, T_N)$.
Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

1°) Ecrire une fonction `Z(k,N,lam)` qui simule l'expérience et renvoie la valeur de Z_k. Comment déterminer une valeur apprximative de $\mathbf{E}(Z_k)$ et $\mathbf{V}(Z_k)$ à l'aide de cette fonction ?

2°) Soit $t > 0$, on note N_t le nombre d'atomes qui se sont désintégrés avant l'instant t. Quelle est la loi de N_t ?

3°) Montrer que $[N_t \geqslant k] = [Z_k \leqslant t]$.

4°) Montrer : $\forall t > 0,\ \mathbf{P}(Z_k \leqslant t) = \displaystyle\sum_{i=k}^{N} \binom{N}{i} \Big(1 - \exp(-\lambda t)\Big)^i \exp\big(-(N-i)\lambda t\big)$

5°) Montrer que Z_k admet une densité f_k que l'on peut définir par :

$$f_k(t) = \begin{cases} \lambda \dfrac{N!}{(k-1)!(N-k)!} \Big(1 - \exp(-\lambda t)\Big)^{k-1} \exp\big(-(N-k+1)\lambda t\big) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 $^{\text{e}}$ Partie : Datation au carbone 14

Etant donné un gramme de matière d'origine organique, imaginons que les physiciens et les chimistes soient capables d'en déterminer avec précision la teneur en atomes de carbone 14. Désignons alors par N le nombre estimé d'atomes dans le morceau en question et appelons t la durée nous séparant de sa mort.
A la mort de l'organisme, référencée à partir de maintenant comme l'instant 0 (de sorte que t désigne également l'instant présent.) nous savons que le gramme de carbone comptait environ $N_0 = 6,8.10^{10}$ atomes de carbone 14.
La mesure réalisée par les physiciens nous indique que $N_0 - N$ particules se sont alors désintégrées.
Nous supposons une fois encore que les particules de carbone 14 au sein du gramme étudié se désintègrent indépendamment les unes des autres.

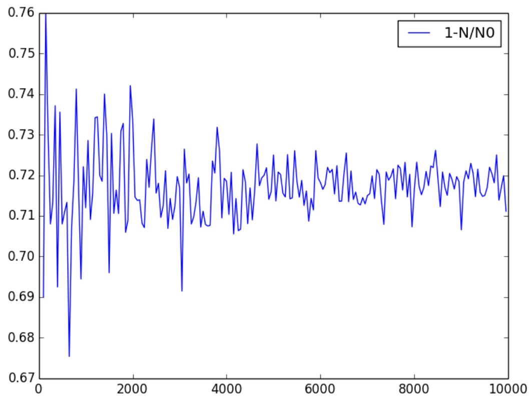
1°) On numérote à nouveau nos atomes de carbone radioactif à l'instant 0, et on note B_i la variable aléatoire égale à 1 si l'atome numéro i s'est désintégré et 0 sinon.

a. Montrer que : $N_0 - N = \sum_{i=1}^{N_0} B_i$.

b. Quelle est la loi des (B_i) ?

c. Ecrire une fonction `frequence(N0,t,lam)` qui simule l'expérience et qui renvoie $1 - \dfrac{N}{N_0}$

d. On a tracé pour différentes valeurs de N_0 le résultat de cette fonction pour une valeur de t arbitraire.



Qu'en pensez vous quand $N_0 \to +\infty$? Que représente à votre avis cette limite ?

Ce résultat est usuellement appelé «Loi forte des grands nombres» et nous l'accepterons sans démonstration.

e. Comme N_0 est très grand, en déduire qu'une valeur approchée de t est $\dfrac{\ln(N_0) - \ln(N)}{\lambda}$.

2°) Se pose en pratique la question de la détermination de la teneur en carbone 14 du morceau de matière d'origine organique.

Dans la même référence que précédemment, le mode expérimental est décrit de la faqn suivante : *«La mesure de la teneur en carbone 14 actuelle de l'échantillon est évaluée par comptage des désintégrations sur une période de trois jours.»*

Rappelons que N désigne le nombre d'atomes de carbone 14 actuellement présents dans l'échantillon. On note nd le nombre de désintégrations ayant lieu entre l'instant t et l'instant $t + \delta$ ($\delta = 3$ jours selon les conditions expérimentales précédentes).

En utilisant le caractère sans mémoire de la loi exponentielle, on peut considérer que tout se passe comme précédemment avec pour situation initiale N atomes au lieu de N_0 et une durée de temps δ au lieu de t.

En déduire une approximation de N en fonction de nd, λ et δ.

4 ^{e} Partie : Limite de la méthode

Pour que la loi des grands nombres puisse être appliquée au contexte précédent, et que l'approximation ci-dessus soit acceptable, il est nécessaire que N soit suffisamment grand. Nous cherchons désormais à quantifier cette restriction théorique, afin d'exhiber un seuil de validité de la méthode de datation.

Remarque : Du fait de la très grande valeur de N_0, on considère que l'approximation $\frac{N}{N_0} \approx \exp(-\lambda t)$ est valide et on s'intéresse uniquement à l'approximation $N \approx \frac{nd}{1-\exp(-\lambda\delta)}$ où nd est le nombre d'atomes qui se sont désintégrés pendant la période de δ jours.

1°) On note N le nombre réel d'atomes de Carbone 14 présents au moment de la mesure, correspondant à une datation réelle t et N_e le nombre d'atomes estimé par la formule $\dfrac{nd}{1 - \exp(-\lambda\delta)}$, correspondant à une datation estimée t_e.

On note $\varepsilon = \dfrac{N_e - N}{N}$ l'erreur relative entre N et son estimation N_e.

Quelle erreur de datation provoque une erreur de 5% sur la mesure de N ?

2°) De la même manière que dans la partie précédente, on numérote les N atomes de carbone radioactif présents dans l'échantillon à l'instant t et on note B'_i la variable aléatoire égale à 1 si l'atome numéro i se désintègre entre l'instant t et l'instant $t + \delta$.

On rappelle que $B'_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$ avec $\alpha = 1 - \exp(-\lambda\delta)$. On notera $\sigma = \sigma(B'_i)$.

Montrer que $\alpha\varepsilon = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} B'_i - \alpha$

3°) On note : $Y_n = \dfrac{B'_1 + B'_2 + \cdots + B'_n}{n}$ et $Y_n^* = \dfrac{Y_n - \alpha}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

On note également F_n la fonction de répartition de Y_n^*.

Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} B'_i - \alpha\right| \geqslant \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - (F_n(2) - F_n(-2))$.

4°) A l'aide du théorème central limite, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B'_i - \alpha\right| \geqslant \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ en fonction de Φ, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et en donner une approximation numérique.

5°) L'inégalité de Berry-Essen affirme :

Théorème :

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, admettant des moments d'ordres de 1 à 3. On note :

- ➢ $m = \mathbf{E}(X_i)$,
- ➢ $\sigma^2 = \mathbf{V}(X_i)$, et on suppose $\sigma > 0$,
- ➢ $\rho = \mathbf{E}|X_i - m|^3$.

On note :

- ★ $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et Y_n^* la variable centrée réduite associée à Y_n
- ★ F_n la fonction de répartition de Y_n^*
- ★ Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Alors pour tout x et pour tout n,

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

où C est une constante dont on a une approximation $C = 0.5$

a. Dans le but d'appliquer ce théorème pour les variables (B'_i), déterminer m, σ^2, ρ en fonction de α. Démonter également que $m \approx \lambda\delta$, $\sigma \approx \sqrt{\lambda\delta}$ et $\rho \approx \lambda\delta$.

b. Déterminer un entier n_0 vérifiant :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |F_n(x) - \Phi(x)| < 0.025$$

Démontrer qu'on a alors :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B'_i - \alpha\right| \geqslant \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) < 0.1$$

On suppose pour la suite, qu'on a effectivement $N > n_0$.

6°) En déduire $\mathbf{P}\left(\varepsilon \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{\lambda\delta N}}\right) < 0.1$

7°) En considérant que $N_0 \exp(-\lambda t)$ est une bonne approximation de N, en déduire une valeur maximale pour t pour avoir $\mathbf{P}(\varepsilon < 0.05) > 0.9$ et la valeur de N correspondante.

8°) La valeur trouvée permet-elle de justifier à posteriori les différentes approximations faites ?