$\boxed{\text{D09S}}$

Calculatrices interdites

Si au cours de l'épreuve le candidat trouve ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et continuera sa composition en expliquant les choix qu'il aura été amené à faire.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier strictement supérieur à 1. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne à coefficients réels.

On rappelle que ce sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et que $\text{Dim}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ et $\text{Dim}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\star)$ si on a :

$$\forall A \in E, \Big(A \text{ non inversible } \Leftrightarrow A = 0\Big)$$

(c'est à dire si la seule matrice non inversible de E est la matrice nulle).

On appelle p le plus grand entier tel qu'il existe un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension p qui vérifie $(\star)$.

1. Quelques généralités.

1.a Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq 0$ et soit $E = \text{Vect}(M)$. Montrer que E vérifie $(\star)$ si et seulement si M est inversible. En déduire que $p \geq 1$.

1.b Justifier que $p < n^2$.

1.c Soit $k > n$ et soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension k. Notons $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ une base de E. Soit X un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la famille de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ suivante est liée : $(A_1X, A_2X, \dots, A_kX)$. En déduire que E ne vérifie pas $(\star)$. Justifier alors que $p \leq n$.

1.d Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit également M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $F = \{MA \,|\, A \in E\}$. Montrer que F est lui aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que E et F sont isomorphes, qu'ils ont la même dimension, et que F verifie $(\star)$ si et seulement si E verifie $(\star)$. (*Indication* : on pourra utiliser l'application φ définie par $\varphi(A) = MA$).

1.e Montrer que si $k \in [\![0\,;p]\!]$, alors il existe un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension k qui vérifie $(\star)$.

2. On se place ici dans le cas $n = 2$.

2.a Au vu de la question 1, quelles sont les valeurs possibles pour p ?

2.b Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivant vérifie $(\star)$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

2.c En déduire la valeur de p.

3. On se place ici dans le cas $n = 3$.

On admet que l'application suivante :

$$\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \mapsto & aei + dhc + gbf - ahf - bdi - gec \end{array}$$

vérifie la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \Big(\det(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ non inversible }\Big)$$

3.a Au vu de la question 1, quelles sont les valeurs possibles pour p ?

3.b Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 2 et soit (A, B) une base de E.

3.b.i On suppose dans cette question que B n'est pas inversible. Montrer que E ne vérifie pas $(\star)$.

On suppose dans la suite que B est inversible et on note $C = B^{-1}A$.

3.b.ii Montrer que E vérifie $(\star)$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(C, I)$ vérifie $(\star)$.

3.b.iii Montrer que l'application $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $P(t) = \det(C + tI)$ est un polynôme et déterminer son degré. Justifier que P admet au moins une racine réelle.

3.b.iv Montrer que E ne vérifie pas $(\star)$.

3.c Déduire de ce qui précède la valeur de p.

4. On se place ici dans le cas $n = 4$.

On introduit les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et on pose $E = \mathrm{Vect}(I, J, K, L)$.

4.a Calculer I^2, J^2, K^2 et L^2.

4.b Calculer JK, KJ, JL, LJ, KL et LK.

4.c Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer $(aI + bJ + cK + dL)(aI - bJ - cK - dL)$ (indication : le résultat est colinéaire à l'un des vecteurs I, J, K, L).

4.d En déduire que E vérifie $(\star)$.

4.e En déduire la valeur de p.