Devoir 05 à la maison

Problème 1

Partie A : Un calcul de somme

Soit $x \in]0\,;1[$. Pour tout couple (n,k) de $\mathbb{N}^2$, on pose : $\quad S_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{k} x^i$.

1. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme $S_{n,0}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n,0}$.

2. **a.** Montrer : $\quad \forall (i,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \binom{k+i}{k} - \binom{k+i-1}{k} = \binom{k+i-1}{k-1}$.

b. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (1-x)\,S_{n,k} = S_{n,k-1} - \binom{k+n}{k} x^{n+1}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les limites de $n^k x^n$ puis de $\binom{k+n}{k} x^n$ lorsque n tend vers l'infini.

4. En raisonnant par récurrence sur k, montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n,k} = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

5. En déduire que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Partie B : Étude d'une expérience aléatoire

On dispose d'une pièce de monnaie amenant pile avec une probabilité p ($p \in]0\,;1[$). On lance cette pièce un nombre aléatoire de fois, voire pas du tout. Les lancers sont supposés indépendants. À chaque pile obtenu, on gagne 1 €.

Pour tous n et k de $\mathbb{N}$, on définit les événements

L_n : « on lance exactement n fois la pièce » et G_k : « on gagne exactement k € »,

et on pose $u_n = \mathbf{P}(L_n)$.

On admet que si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\,\mathbf{P}(G_k)$ converge, alors la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(G_k)$ est égale au gain moyen obtenu.

1. Justifier la convergence de série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$. Que vaut la somme ?

2. **a.** Calculer, pour tout (n,k) de $\mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{L_n}(G_k)$. *(Séparer les cas $k \in [\![0\,;n]\!]$ et $k > n$)*

b. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$, une expression de $\mathbf{P}(G_k)$ en fonction de k, p et des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Dans cette question, on suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

a. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(G_k) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}$.

b. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(G_k)$ et calculer sa somme. Commenter le résultat obtenu.

c. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\,\mathbf{P}(G_k)$ et calculer le gain moyen.

4. On pose $q = 1 - p$. Dans cette question, on suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = q^{n-1}p$.

a. Calculer la probabilité u_0 de ne pas lancer la pièce.

b. Calculer $\mathbf{P}(G_0)$ puis, en utilisant la partie **A.**, montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(G_k) = \dfrac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$.

c. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} k\,\mathbf{P}(G_k)$ et calculer le gain moyen.

Problème II

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels non nuls. On effectue dans une urne, contenant initialement une boule blanche et une boule noire, une suite de tirages de la façon suivante :

➤ on tire une première boule :

- si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec en plus c_1 autres boules blanches, puis on procède au tirage suivant
- si la boule obtenue est noire, on s'arrête définitivement ;

➤ pour tout entier n supérieur ou égal à 2, si les $n-1$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche, on procède au n-ième tirage :

- si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec en plus c_n autres boules blanches
- si la boule obtenue est noire, on s'arrête définitivement.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on définit les événements :

E_n : « on s'arrête d'effectuer des tirages à l'issue du n-ième tirage »

F_n : « on obtient une boule blanche à chacun des n premiers tirages »

et on pose : $p_n = \mathbf{P}(E_n)$, et $q_n = \mathbf{P}(F_n)$.

Enfin, on définit l'événement G : « on s'arrête d'effectuer des tirages » et on s'intéresse à la probabilité de G.

Dans tout le problème, on pourra utiliser l'encadrement $(*)$ suivant : $\forall x \in [0\,;1]$, $\dfrac{x}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Partie A : Expression de $\mathbf{P}(G)$

1. Justifier que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ converge et que l'on a : $\mathbf{P}(G) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$.

2. a. Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b. En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ avec $\ell \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

3. a. Exprimer, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, l'événement $\overline{F_n}$ à l'aide des événements E_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

b. En déduire : $\mathbf{P}(G) = 1 - \ell$.

Partie B : Étude de plusieurs cas particuliers

1. Premier exemple : Dans cette question, on suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $c_n = 1$.

a. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

b. En déduire $\mathbf{P}(G)$.

2. Deuxième exemple : Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $c_n = c$.

a. Calculer, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, q_n.

b. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(q_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{1+kc}\right)$ puis $-\ln(q_n) \geqslant \dfrac{1}{2c}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

c. En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis $\mathbf{P}(G)$.

3. **Troisième exemple :** Dans cette question, on suppose que, $c_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $c_n = 2n+1$.

a. Calculer, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$.

b. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $q_n = \dfrac{n+1}{4n}$. En déduire $\mathbf{P}(G)$.

4. **Quatrième exemple :** Dans cette question, on suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $c_n = 2^{n-1}$.

a. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $q_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\ln(q_n) \leqslant 2$.

c. Montrer alors que $\mathbf{P}(G) < 1$.

Partie C : Étude du cas général

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad u_0 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k = 1 + c_1 + \cdots + c_n$.

1. En utilisant l'encadrement $(*)$, montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{u_n}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ sont de même nature.

2. Montrer que la suite $\big(\ln(q_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{u_n}$ converge.

3. En déduire que G est un événement quasi-certain si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{u_n}$ diverge.

• FIN •