Devoir 03 à la maison

Dans ce devoir, on étudie l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé d'une seule espèce dans la partie **I** et de deux espèces dans la partie **II**.

PARTIE I - Modèle à une seule espèce

Dans cette partie, on s'intéresse à une population constituée d'une seule espèce.

On note, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $X(t)$ le nombre d'individus présents à l'instant t. On note également X_0 le nombre d'individus présents à l'instant initial ; ainsi $X(0) = X_0$. On suppose que $X_0 \geqslant 0$.

On modélise la croissance de la population au moyen d'équations différentielles de la forme :

$$(E) : \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad X'(t) = f\big(X(t)\big),$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On appelle **équilibre** ou **état stationnaire de** (E) toute valeur x^* de $\mathbb{R}$ pour laquelle la fonction constante égale à x^* est solution de (E).

On dit qu'un équilibre x^* est **stable** lorsque toute fonction solution de (E), ayant pour condition initiale un X_0 proche de x^*, tend vers x^* en $+\infty$. On dit qu'un équilibre x^* est **instable** lorsqu'il n'est pas stable.

Enfin, on admet le théorème suivant (appelé théorème de Cauchy-Lipschitz) :

> *Soient $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $X_{t_0} \in \mathbb{R}$ fixés.*
> *Alors, il existe une et une seule solution X à l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant $X(t_0) = X_{t_0}$.*

I.A - Le modèle malthusien

Le modèle de Malthus est un modèle simple : il suppose que la population est de taille raisonnable, et qu'elle est placée dans des conditions idéales : espace illimité, nourriture suffisante, absence de prédateurs, résistance aux maladies, ...

Dans ces conditions, on considère que la croissance de la population est proportionnelle au nombre d'individus présents.

On obtient alors l'équation différentielle $(E_1) : \; X'(t) = rX(t), \quad$ avec $r \in \mathbb{R}$.

1. Justifier l'équation différentielle précédente. Donner une interprétation au réel r.

2. Résolution explicite

a. Expliciter l'unique solution de l'équation (E_1) vérifiant $X(0) = X_0$.

b. Représenter cette solution lorsque $r < 0$, $r = 0$ et $r > 0$. Donner une interprétation dans chacun des trois cas.

3. Équilibre et stabilité des équilibres On suppose dans cette question $r \neq 0$.
Vérifier que 0 est le seul équilibre de (E_1) et discuter de la stabilité de cet équilibre en fonction de r.

4. Résolution numérique Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout n de $[\![0\,;N]\!]$, $t_n = \dfrac{nT}{N}$.
La solution théorique de cette équation est connue, mais nous allons toutefois nous baser sur cet exemple pour mettre en œuvre la méthode d'Euler afin de comparer numériquement la solution théorique et la solution approchée obtenue avec la méthode d'Euler sur l'intervalle $[0\,;T]$, avec la subdivision $(t_n)_{n\in[\![0\,;N]\!]}$.
(Voir éventuellement les rappels sur la méthode d'Euler en fin de devoir ...)

a. Montrer que la méthode d'Euler nous conduit à considérer l'ensemble des points $(u_n)_{n\in[0\,;N]}$ définis par :

$$u_0 = X_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in [\![0\,;N-1]\!],\ \ u_{n+1} = \Big(1 + r\frac{T}{N}\Big)u_n.$$

b. Déterminer, pour tout n de $[\![0\,;N]\!]$, une expression de u_n en fonction de N, X_0 et n.

c. Montrer : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} u_N = x(T)$. Comment interpréter ce résultat ?

Dans les deux questions suivantes, on prendra $r = 0.5$.

d. Écrire une fonction `Euler` qui prend en argument `X0`, `N` et `T` et qui renvoie la liste `U` contenant les valeurs des réels $(u_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ définis dans la question **4.a**.

e. Sur le même graphique, tracer la solution exacte sur l'intervalle $[0\,;3]$ avec $X_0 = 1$, ainsi que les solutions approchées obtenues par la méthode d'Euler en prenant $N = 5, N = 10$ puis $N = 50$. Que remarque-t-on ?

I.B - Le modèle de croissance logistique

Dans toute cette partie, r et K sont deux réels strictement positifs.

Les conditions idéales du modèle de Malthus sont, en réalité, valable uniquement sur une courte durée. Dès que l'on s'approche de la surpopulation, cela implique un manque de nourriture, des interactions dues à la promiscuité, ... et le taux de croissance diminue.

Dans le modèle de croissance logistique, on remplace le coefficient r constant par un coefficient variable selon la taille de la population ; on multiplie ainsi r par $\Big(1 - \dfrac{X(t)}{K}\Big)$.

On obtient alors l'équation différentielle (E_2) suivante : $\qquad X'(t) = r\Big(1 - \dfrac{X(t)}{K}\Big)X(t).$

1. Justification du modèle

a. Identifier la fonction f dans l'équation générale (E).

b. Déterminer le signe de la fonction $x \mapsto r\Big(1 - \dfrac{x}{K}\Big)$ sur $\mathbb{R}^+$.

c. La constante K est appelée « capacité d'accueil ». Commenter cette appellation.

2. Résolution explicite Soit X une solution de (E_2).

a. On suppose $X_0 = 0$. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ X(t) = 0$.

b. On suppose $X_0 > 0$.

① Montrer : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ X(t) > 0$.

② On pose alors, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $Y(t) = \dfrac{1}{X(t)}$.

Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.

③ En déduire qu'il existe une constante B que l'on exprimera en fonction de K et X_0 telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ X(t) = \frac{K}{1 + B\mathrm{e}^{-rt}}.$$

c. Déterminer, dans le cas où $X_0 > 0$, la limite de $X(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

d. Toujours dans le cas où $X_0 > 0$, étudier les variations de la fonction X sur $\mathbb{R}^+$ en fonction de la valeur de X_0, puis tracer l'allure de sa courbe représentative.

3. Équilibre et stabilité des équilibres

a. Vérifier que 0 et K sont les seuls équilibres de (E_2).

b. Déterminer la stabilité de ces équilibres. Déterminer les signes des nombres dérivés $f'(0)$ et $f'(K)$.

c. Émettre une conjecture entre la stabilité d'un équilibre x^* et le signe du nombre dérivé $f'(x^*)$.

I.C - Stabilité des états stationnaires

On revient, dans cette partie, au cas d'une fonction f quelconque dans l'équation générale (E).

1. Soit $x^* \in \mathbb{R}$. Montrer que x^* est un équilibre de (E) si et seulement si $f(x^*) = 0$.

Soit x^* un équilibre de (E) tel que $f'(x^*) < 0$. Nous allons montrer que x^* est un équilibre stable.

2. Justifier qu'il existe $a > 0$ et $r > 0$ tels que : $\forall u \in [x^* - r\,; x^* + r],\ \ f'(u) \leqslant -a < 0$.

Soit X une solution de (E) avec pour condition initiale X_0 tel que $|X_0 - x^*| \leqslant r$.
On admet qu'on a alors : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ |X(t) - x^*| \leqslant r$.

3. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ g(t) = \big(X(t) - x^*\big)^2$.

a. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ fixé. On pose, pour tout s de $[0\,;1]$, $G(s) = x^* + s\big(X(t) - x^*\big)$.

① Calculer, pour tout s de $[0\,;1]$, $G'(s)$.

② Montrer alors : $f\big(X(t)\big) = f(x^*) + \displaystyle\int_0^1 f'\big(G(s)\big)\big(X(t) - x^*\big)\,\mathrm{d}s$, puis : $X'(t) = \big(X(t) - x^*\big)\displaystyle\int_0^1 f'\big(G(s)\big)\,\mathrm{d}s$.

③ Montrer : $\forall s \in [0\,;1],\ \ G(s) \in [x^* - r\,; x^* + r]$.

b. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ g'(t) \leqslant -2ag(t)$, puis : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ g(t) \leqslant g(0)\mathrm{e}^{-2at}$.

4. En déduire : $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = x^*$. Conclure.

On montre de même que, si x^* est un équilibre de (S) avec $f'(x^*) > 0$, alors x^* est un équilibre instable.

PARTIE II - Le modèle de Lotka-Volterra

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution conjointe de deux populations : les proies et les prédateurs.

On considère que les proies, en l'absence de prédateurs, se reproduisent. Inversement, les prédateurs, en l'absence de proies, ont tendance à disparaître, faute de nourriture. Quant aux interactions entre les deux espèces, on les considère néfastes pour les proies, et profitables aux prédateurs.

On note, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $X(t)$ (resp. $Y(t)$) le nombre de proies (resp. prédateurs) présents à l'instant t. On note également X_0 (resp. Y_0) le nombre de proies (resp. prédateurs) présents à l'instant initial ; ainsi $X(0) = X_0$ et $Y(0) = Y_0$. On suppose que $X_0 > 0$ et $Y_0 > 0$.

On obtient alors le système différentiel (S) suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcl} X'(t) & = & aX(t) & - & bX(t)Y(t) \\ Y'(t) & = & -cY(t) & + & dX(t)Y(t) \end{array}\right.$, avec $a, b, c, d > 0$.

On admet le théorème suivant (toujours appelé théorème de Cauchy-Lipschitz) :

> *Soient $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $X_{t_0}, Y_{t_0} \in \mathbb{R}$ fixés.*
> *Alors, il existe une et une seule solution (X, Y) au système différentiel (S) sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant ;*
> $$\left\{\begin{array}{l} X(t_0) = X_{t_0} \\ Y(t_0) = Y_{t_0} \end{array}\right. .$$

Enfin, pour tout (u, v) de $]0\,;+\infty[^2$, on pose $F(u, v) = du - c\ln(u) + bv - a\ln(v)$.

1. Donner une interprétation aux réels a, b, c des d.

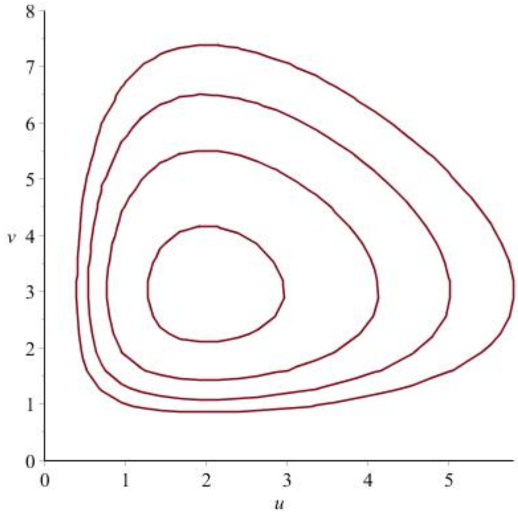
2. **Étude de la fonction F**

a. On note $\Phi : u \mapsto du - c\ln(u)$. Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifier qu'elle admet un minimum.

b. En déduire que F possède un minimum et préciser l'ensemble des points en lesquels celui-ci est atteint.
On note m_F le minimum de F.

c. Pour tout α de $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble $\Gamma_\alpha = \{(u,v) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \ / \ F(u,v) = \alpha\}$.
Que dire de Γ_α lorsque $\alpha < m_F$ et lorsque $\alpha = m_F$?

Un logiciel nous permet d'obtenir les représentations suivantes de Γ_α, pour différentes valeurs de $\alpha > m_F$:



3. Étude qualitative Soit (X, Y) une solution au système différentiel (S).

a. Justifier en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz que, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $X(t)$ et $Y(t)$ sont strictement positifs.

b. Montrer que la fonction $t \mapsto F\big(X(t), Y(t)\big)$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.

c. En déduire qu'il existe un réel $\alpha \geqslant m_F$ tel que, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\big(X(t), Y(t)\big)$ appartient à l'ensemble Γ_α.
Que dire des fonctions X et Y lorsque $\alpha = m_F$?

d. En utilisant la représentation de Γ_α, justifier que les fonctions X et Y sont bornées.

e. On admet que les fonctions X et Y sont périodiques, de même période. On note T une période et on définit :

$$v_X = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_Y = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Que représentent les valeurs de v_X t de v_Y.

Calculer v_X et v_Y en fonction de a, b, c et d. *On pourra remarquer que* $X(t) = \dfrac{1}{d}\Big(c + \dfrac{Y'(t)}{Y(t)}\Big)$.

4. Résolution numérique Dans cette question, on prendra $a = 3, b = 1, c = 2, d = 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout n de $[\![0\,;N]\!]$, $t_n = \dfrac{nT}{N}$.

a. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Définir l'ensemble des points $(u_n)_{n\in[0\,;N]}$ et $(v_n)_{n\in[0\,;N]}$ que l'on obtient en appliquant la méthode d'Euler au système (S) pour obtenir des approximations de X et Y sur l'intervalle de temps $[0\,;T]$, avec la subdivision $(t_n)_{n\in[0\,;N]}$.

b. Écrire une fonction `EulerLV` qui prend en argument `X0`, `Y0`, `N` et `T` et qui renvoie les listes `U` et `V` contenant respectivement les valeurs de $(u_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ et $(v_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ définies dans la question précédente.

c. Tracer le portrait de phase (« Y en fonction de X ») des solutions approchées obtenues sur l'intervalle de temps $[0\,;10]$ avec $N = 200$, $X_0 = 1$ et $Y_0 = 2$.

• FIN •

Rappel sur la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode de résolution numérique des équations différentielles du premier ordre.

Considérons une équation différentielle (E) *du premier ordre, sur un intervalle* $[a\,;b]$.

Des théorèmes nous assurent que, la condition initiale étant donnée, il existe une unique solution y *à cette équation différentielle ; mais en pratique, on est rarement capable de déterminer explicitement cette solution. On cherche alors à construire une solution approchée de* (E) *sur* $[a\,;b]$.

Pour cela, on se fixe un entier N *de* $\mathbb{N}^*$ *et on se donne une subdivision* $(t_n)_{n\in[0\,;N]}$ *de* $[a\,;b]$. *On cherche alors à approcher la solution exacte* y *en chacun des points de la subdivision, c'est-à-dire à déterminer, pour tout* n *de* $[\![0\,;N]\!]$, *une approximation de* $y(t_n)$ *que l'on notera* u_n.

La méthode d'Euler consiste simplement à approximer $y'(t_n)$ *par* $\dfrac{y(t_{n+1})-y(t_n)}{t_{n+1}-t_n}$.

Ainsi, en remplaçant dans l'équation différentielle (E), $y(t_n)$ *par* u_n *et* $y'(t_n)$ *par* $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{t_{n+1}-t_n}$, *on obtient une relation entre* u_{n+1} *et* u_n. *En initialisant* u_0 *à* $y(a)$, *on calcule alors les réels* $(u_n)_{n\in[0\,;N]}$ *de proche en proche.*

Le plus souvent (et c'est le cas dans ce devoir), on considère la subdivision $(t_n)_{n\in[0\,;N]}$ *définie par :*

$$\forall n \in [\![0\,;N]\!], \quad t_n = a + n\frac{b-a}{N}.$$