$\boxed{\text{D01M}}$

I. Problème

Dans tout le problème on note $\mathcal{Q}$ le quart supérieur droit du plan, c'est à dire :

$$\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ u_1 \geq 0 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2) \end{cases}$$

A tout élément (x, y) de $\mathcal{Q}$ on associe la suite $u(x, y)$ appartenant à $\mathcal{S}$ définie par $u_0 = x$ et $u_1 = y$. Le terme de rang n de la suite $u(x, y)$ sera noté $u_n(x, y)$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, plus simplement u_n.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, E_λ désignera l'ensemble des éléments $(x, y) \in \mathcal{Q}$ tels que la suite $u(x, y)$ tend vers λ.

1. Quelques généralités.

1.a Déterminer les suites constantes appartenant à $\mathcal{S}$.

Solution: Soit une suite de $\mathcal{S}$ constante égale au réel α. La relation de récurrence définissant $\mathcal{S}$ donne alors que $\alpha = \frac{1}{2}(2\alpha^2)$, c'est à dire que $\alpha = \alpha^2$ et donc que $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.
Réciproquement, si on prend $u_0 = u_1 = 0$ on obtient que (u_n) est la suite nulle, et si on prend $u_0 = u_1 = 1$ on obtient que (u_n) est la suite constante égale à 1.
En conclusion : $\boxed{\text{Les suites constantes de } \mathcal{S} \text{ sont la suite nulle et la suite égale à 1}}$.

1.b Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, d'une suite appartenant à $\mathcal{S}$?

Solution: Par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2)$, on constate que les seules limites possibles pour (u_n) sont $\boxed{0, 1 \text{ et } +\infty}$.

1.c Montrer que si une suite de $\mathcal{S}$ a trois termes consécutifs égaux, alors c'est une suite constante.

Solution: Supposons qu'il existe un entier k tel que $u_k = u_{k+1} = u_{k+2}$.
Alors on a

$$\begin{aligned} u_{k+3} &= \frac{1}{2}(u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2) \\ &= \frac{1}{2}(u_{k+1}^2 + u_k^2) \text{ car } u_{k+2} = u_k \\ &= u_{k+2} \end{aligned}$$

On a alors que $u_{k+1} = u_{k+2} = u_{k+3}$, et une récurrence facile assure alors que $\forall n \geq k$, $u_n = u_k$.
Ceci prouve que (u_n) est constante à partir d'un certain rang, mais pas encore qu'elle est vraiment constante !
Il faut aussi montrer que les termes qui précèdent u_k lui sont également égaux.

Exprimons u_{k-1} en fonction de u_k et u_{k+1} (les termes de (u_n) étant par construction tous positifs, le passage à la racine ne pose pas de problème) :

$$\begin{aligned} u_{k-1} &= \sqrt{2u_{k+1} - u_k^2} \\ &= \sqrt{2u_{k+2} - u_{k+1}^2} \text{ car } u_k = u_{k+1} = u_{k+2} \\ &= u_k \end{aligned}$$

Et une récurrence descendante limitée montre que pour tout $n \leq k$ on a $u_n = u_k$.
Donc $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est constante}}$.

1.d Montrer que si une suite de $\mathcal{S}$ a deux termes consécutifs égaux à 1, alors c'est une suite constante.

Solution: Supposons que pour un certain entier k on a $u_k = u_{k+1} = 1$. Alors $u_{k+2} = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2) = 1$. Donc la suite a trois termes consécutifs égaux. Donc, d'après la question 1.c, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est constante}}$.

1.e Que peut-on dire d'une suite de $\mathcal{S}$ dont un des termes autre que les deux premiers est nul ?

Solution: Supposons que pour un certain $k \geq 2$ on a $u_k = 0$. Il vient alors que $u_{k-2}^2 + u_{k-1}^2 = 0$, et donc que $u_{k-2} = u_{k-1} = 0$. La suite a donc trois termes consécutifs égaux, c'est donc une suite constante. En l'occurence $\boxed{(u_n) \text{ est la suite nulle}}$.

2. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que :

2.a Si $0 \leq x \leq y \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ alors $y \geq 1$ ou $x = y = 0$.

Solution: Supposons que $y < 1$ et montrons qu'alors $x = y = 0$, ce qui prouvera le résultat (Ah bon ? ?)
Puisque $y < 1$, on a $y^2 \leq y$, et puisque $y \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, il vient que $y^2 \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, ce qui donne que $y^2 \leq x^2$.
Or on a $0 \leq x \leq y$, donc il vient que $x = y$ (car la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$).
L'inégalité $y \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ devient donc $y \leq y^2$.
comme on avait déjà $y^2 \leq y$, il en résulte que $y^2 = y$, et donc que $y = 0$ (l'autre solution de cette équation, 1, ne convient pas puisqu'on a supposé $y < 1$), entrainant enfin que $x = y = 0$.

Conclusion ; $\boxed{\text{Si } 0 \leq x \leq y \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ alors } y \geq 1 \text{ ou } x = y = 0}$.

2.b Si $\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x \leq y$ alors $y \leq 1$.

Solution: Supposons que $y > 1$ et tentons d'établir une absurdité :
Puisque x est positif, il vient que $xy \geq x$ (inégalité large seulement car x peut être nul...).
On a donc $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq xy$, ce qui donne que $(x - y)^2 = 0$, et donc que $x = y$.
L'inégalité $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq y$ devient donc $y^2 \leq y$, ce qui contredit l'hypothèse $y > 1$.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x \leq y \text{ alors } y \leq 1}$.

3. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{S}$. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-2}$ sont de même signe.

Solution: D'après la relation de récurrence définissant les suites de $\mathcal{S}$, il vient facilement que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n-1}^2 - 2u_n)$$

Regardant ce résultat dans le blanc des yeux, on se dit subitement qu'on a plutôt envie de s'intéresser à $u_n^2 - u_{n-2}^2$, qui est de même signe que $u_n - u_{n-2}$ puisque les termes de la suite (u_n) sont positifs et que la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. C'est parti :

$$u_n^2 - u_{n-2}^2 = u_n^2 - (2u_n - u_{n-1}^2) = u_n^2 + u_{n-1}^2 - 2u_n$$

Cette dernière quantité est franchement du même signe que $u_{n+1} - u_n$, et donc on a bien que $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2,\ u_{n+1} - u_n \text{ et } u_n - u_{n-2} \text{ sont de même signe}}$.

4. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{S}$ non constante et telle qu'il existe $N \geq 0$ tel que u_{N+2} est supérieur ou égal à u_N et u_{N+1}.

4.a Montrer que $u_{N+1} \leq u_{N+2} \leq u_{N+3}$.

Solution: Puisque les termes de la suite (u_n) sont tous positifs, on a $u_{N+2}^2 \geq u_N^2$. Il vient alors :

$$u_{N+3} = \frac{1}{2}(u_{N+1}^2 + u_{N+2}^2) \geq \frac{1}{2}(u_{N+1}^2 + u_N^2) = u_{N+2}$$

Et puisqu'on avait déjà $u_{N+2} \geq u_{N+1}$, il vient bien que $\boxed{u_{N+1} \leq u_{N+2} \leq u_{N+3}}$.

4.b Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Solution: Par le même raisonnement qu'à la question précédente, une récurrence facile montre que pour tout $k \geq N+1$ on $u_k \leq u_{k+1} \leq u_{k+2}$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite est croissante à partir du rang } N+1}$.

4.c Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang.

Solution: Supposons que pour un certain $n \geq N+3$ on ait $u_{n+1} = u_n$. Alors $u_{n+1} - u_n = 0$ et donc $u_{n+1} - u_n$ est à la fois négatif et positif. D'après la question 3, il vient que $u_n - u_{n-2} = 0$, donc que $u_{n-2} = u_n$

Mais puisque $n - 2 \geq N+1$ et que la suite est croissante à partir du rang $N+1$, il vient que $u_{n-2} \leq u_{n-1} \leq u_n$, et donc en fait que $u_{n-2} = u_{n-1} = u_n$.

La suite a donc au moins trois termes consécutifs égaux, donc d'après la question 1.c elle devrait être constante, ce qui est exclu.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante à partir du rang } N+3}$.

4.d Montrer que $u_{N+2} \geq 1$.

Solution: Puisqu'on a que u_{N+2} est supérieur ou égal à u_N et u_{N+1}, et que $u_{N+2} = \frac{1}{2}(u_N^2 + u_{N+1}^2)$, la question 2.a prouve que $\boxed{u_{N+2} \geq 1}$ (on prend $x = u_N$ et $y = u_{N+1}$ ou le contraire selon que u_N est plus grand ou plus petit que u_{N+1}).

4.e Montrer que la suite tend vers $+\infty$.

Solution: La suite étant croissante à partir d'un certain rang, elle tend soit vers une limite finie, soit vers $+\infty$.

On a vu à la question 1.b que les seules limites possibles pour (u_n) sont $0, 1$ et $+\infty$.

Puisque la suite est positive et strictement croissante à partir du rang $N+3$, elle ne peut pas tendre vers 0. Si elle tendait vers 1, alors puisque $u_{N+2} \geq 1$ la suite serait constante

égale à 1 à partir du rang $N+2$, ce qui est impossible puisqu'elle est strictement croissante à partir du rang $N+3$.
La seule possibilité restante est que $\boxed{\text{la suite tend vers } +\infty}$.

5. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{S}$ non constante et telle qu'il existe $N \geq 0$ tel que u_{N+2} soit inférieur ou égal à u_N et u_{N+1}. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la suite est strictement décroissante à partir d'un certain rang et qu'elle tend vers 0.

Solution:
- Puisque $0 \leq u_{N+2} \leq u_N$, il vient que :

$$u_{N+3} = \frac{1}{2}(u_{N+2}^2 + u_{N+1}^2) \leq \frac{1}{2}(u_N^2 + u_{N+1}^2) = u_{N+2} \leq u_{N+1}$$

- D'après le même principe, une récurrence facile assure que :

$$\forall k \geq N+1,\ u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq u_k$$

  Ce qui prouve que la suite est décroissante à partir du rang $N+1$.
- Si on avait $u_{n+1} = u_n$ pour un certain $n \geq N+3$, on aurait alors $u_n = u_{n-2}$ (cf question 3) et comme la suite est décroissante à partir du rang $N+1$ et que $n-2 \geq N+1$, on aurait $u_n = u_{n+1} = u_{n+2}$, ce qui ferait de (u_n) une suite constante en vertu de la question 1.c. Donc (u_n) est strictement décroissante à partir du rang $N+3$.
- puisqu'on a $u_{N+2} \leq u_N, u_{N+1}$, la question 2.b montre que $u_{N+2} \leq 1$.
- Décroissante et minorée par 0, la suite (u_n) est convergente. On a vu au 1.b que sa limite ne peut être que 0 ou 1, mais puisqu'elle est décroissante à partir du rang $N+1$, que $u_{N+2} \leq 1$, et qu'elle est strictement décroissante à partir du rang $N+3$, elle ne peut pas converger vers 1, et donc $\boxed{(u_n) \text{ tend vers } 0}$.

6. Déterminer les limites des suites $u(\sqrt{2}, 0)$ et $u(2, 0)$.

Solution: On va observer quelques premiers termes de chacune de ces suites pour voir si on trouve un terme qui soit supérieur (resp. inférieur) aux deux précédents, auquel cas on saura d'après ce qui précède que la suite est croissante et de limite $+\infty$ (resp. décroissante de limite 0).
Avec une petite fonction Python, par exemple !

```python
def suite(a,b,n):
    T=[0 for i in range(n)]
    T[0]=a
    T[1]=b
    for i in range(2,n):
        T[i]=(T[i-2]**2+T[i-1]**2)/2
    return T
```

Pour la première suite, affichons 10 termes :

```
 from math import sqrt
 suite(sqrt(2),0,10)
[1.4142135623730951, 0, 1.0000000000000002, 0.5000000000000002,
0.6250000000000003, 0.32031250000000033, 0.24661254882812533,
 0.08170892344787736, 0.03374704870525779, 0.003907605733663062]
```

On constate que u_5 est inférieur à u_3 et u_4, donc $\boxed{\text{la suite } u(\sqrt{2}, 0) \text{ tend vers } 0}$.
Avec la deuxième suite proposée :

```
suite(2,0,10)
[2, 0, 2.0, 2.0, 4.0, 10.0, 58.0, 1732.0, 1501594.0, 1127393770330.0]
```

On constate que u_4 est supérieur à u_2 et u_3, donc $\boxed{\text{la suite } u(2,0) \text{ tend vers } +\infty}$.

7. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{S}$ non constante qui ne tend ni vers $+\infty$ ni vers 0.

7.a Montrer que $u_0 \neq u_1$.

Solution: Si on avait $u_0 = u_1$, alors on aurait u_2 qui serait soit inférieur à u_0 et u_1, soit u_2 qui serait supérieur à u_0 et u_1. Dans le premier cas (u_n) tendrait vers 0 (cf 5) et dans le deuxième cas elle tendrait vers $+\infty$ (cf 4). Donc nécessairement $\boxed{u_0 \neq u_1}$.

7.b Montrer que pour tout $n \geq 0$, u_{n+2} est strictement compris entre u_n et u_{n+1}.

Solution: Selon le même principe qu'à la question précédente si, pour un certain n, u_{n+2} était inférieur ou égal à u_{n+1} et u_n ou bien supérieur ou égal à u_{n+1} et u_n, les question 5 et 4 montreraient que la suite tend vers 0 ou vers $+\infty$, ce qui est exclu. Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0,\ u_{n+2} \text{ est strictement compris entre } u_n \text{ et } u_{n+1}}$.

On suppose que $u_0 < u_1$.

7.c Montrer que la suite (u_{2n}) est strictement croissante et que la suite (u_{2n+1}) est strictement décroissante.

Solution: D'après la question précédente, u_2 est strictement entre u_0 et u_1, donc $u_0 < u_2 < u_1$.

De même u_3 est strictement entre u_1 et u_2, donc $u_0 < u_2 < u_3 < u_1$.

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < u_{2n+2} < u_{2n+3} < u_{2n+1}$:

- On vient d'établir que la propriété est vrai pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} < u_{2n+2} < u_{2n+3} < u_{2n+1}$$

  u_{2n+4} est strictement entre u_{2n+2} et u_{2n+3} et u_{2n+5} est strictement entre u_{2n+3} et u_{2n+4}, donc :

$$u_{2n} < u_{2n+2} < u_{2n+4} < u_{2n+5} < u_{2n+3} < u_{2n+1}$$

  Et donc en particulier :

$$u_{2n+2} < u_{2n+4} < u_{2n+5} < u_{2n+3}$$

  Ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, il vient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < u_{2n+2} < u_{2n+3} < u_{2n+1}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{2n} < u_{2n+2}$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_{2n}) \text{ est croissante}}$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1}) \text{ est décroissante}}$.

7.d Etablir que la suite (u_n) tend vers 1.

Solution: La suite (u_{2n+1}) étant décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_{2n+1} \leq u_1$.

Comme on vient de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{2n} < u_{2n+1}$, il vient que la suite (u_{2n}) est majorée par u_1.

Majorée et croissante, elle converge donc vers un réel a.

De même, la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par u_0, elle converge donc vers un réel b.

Pour tout entier n on a $u_{2n+2} = \frac{1}{2}(u_{2n}^2 + u_{2n+1}^2)$. Par passage à la limite, il vient que $a = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

De même, par passage à la limite dans la relation $u_{2n+3} = \frac{1}{2}(u_{2n+1}^2 + u_{2n+2}^2)$, on obtient que $b = \frac{1}{2}(b^2 + a^2)$.

Donc $a = b$, et $a = \frac{1}{2}(a^2+a^2)$, c'est à dire $a = a^2$. Comme par hypothèse la suite ne tend pas vers 0, on a forcément $a = b = 1$ et donc $\boxed{\text{La suite tend vers 1}}$ (du fait de la convergence des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vers la même limite. On remarque au passage que ces deux suites extraites sont en fait adjacentes).

On démontrerait de la même manière que si $u_0 > u_1$ la suite converge aussi vers 1 (il n'est pas demandé de refaire la démonstration).

7.e Montrer que E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ sont non vides et que $\mathcal{Q} = E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty}$.

Solution: On a déjà vu que $(0,0) \in E_0, (1,1) \in E_1$ (cf 1.a), et que $(2,0) \in E_{+\infty}$ (cf 6), ce qui prouve que $\boxed{E_0, E_1 \text{ et } E_{+\infty} \text{ sont non vides}}$.

Soit alors $(a,b) \in \mathcal{Q}$.

Si la suite $u(a,b)$ est constante, alors on sait (cf 1.a) qu'elle est soit dans E_0 soit dans E_1.

Si elle n'est pas constante, alors :

- Elle peut être dans E_0 ou $E_{+\infty}$.
- Si ce n'est pas le cas, elle est forcément dans E_1 (cf 7.d).

Ceci prouve bien que $\boxed{\mathcal{Q} = E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty}}$.