Mathématiques

D08S

14/12/2013 — 3h30

Présentation /3

1 er problème :

A) Étude d'un endomorphisme

1°) Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
Calculer $\Delta(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- Δ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P+\mu Q) &= (\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X)\\ &= \lambda P(X+1)+\mu Q(X+1)-\lambda P(X)-\mu Q(X)\\ &= \lambda(P(X+1)-P(X))+\mu(Q(X+1)-Q(X))\\ &= \lambda\Delta(P)+\mu\Delta(Q)\end{aligned}$$

Donc, par les deux premiers points, $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$.

1 - Soit $k \in \mathbb{N}$.

1
$$\Delta(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ (X+1)^k - X^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i & \text{si } k \geqslant 1\end{cases}$$

2°) **a)** Montrer que si $P \in \operatorname{Ker}\Delta$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.

1 Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, H_n :«$P(n) = P(0)$»

- H_0 est vraie.
- On suppose, pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$ que H_n est vraie ie $P(n) = P(0)$.
  Or $P(X+1) = P(X)$ donc en évaluant en n : $P(n+1) = P(n)$. D'où $P(n+1) = P(0)$.
  Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = P(0)}$.

En considérant le polynôme $Q = P - P(0)$, montrez que P est un polynôme constant.

1 Ainsi, le polynôme $Q = P - P(0)$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Ainsi, $R = 0$ ie $P = P(0)$. Donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$.

b) Montrer alors que $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$.

- On vient de montrer $\operatorname{Ker}\Delta \subset \mathbb{R}_0[X]$
- Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_0[X]$ alors $P = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Delta(P) = \lambda - \lambda = 0$.
  Donc $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.

1 $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$.

3°) a) Si P n'est pas un polynôme constant, préciser le degré de P en fonction de celui de P, ainsi que le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $p = \deg(P) \geqslant 1$. P s'écrit : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta(P) &= \Delta(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k) \\
&= \sum_{k=0}^{p} a_k \Delta(X^k) && \text{par linéarité de } \Delta \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_k \Delta(X^k) && \text{car } \Delta(1) = 0
\end{aligned}$$

Or, pour $1 \leqslant k \leqslant p, \Delta(X^k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$ donc $\deg(\Delta(X^k)) = k - 1 \leqslant p - 1$.

Ainsi, $\deg(\Delta(P)) \leqslant p - 1$.

3 De plus, le coefficient de X^{p-1} dans $\Delta(P)$ est : $a_p\binom{p}{p-1} = pa_p \neq 0$.

Donc, $\boxed{\deg(\Delta(P)) = p - 1 = \deg(P) - 1 \text{ et le coefficient dominant de } \Delta(P) \text{ est } pa_p}$

b) Soit $n \geqslant 1$, montrer que $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$

1 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Si P est constant alors $\Delta(P) = 0$. Sinon, $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \leqslant n - 1$.

Donc, $\boxed{\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

4°) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

C'est-à-dire $\Delta_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \Delta(P) \end{array}$.

Déterminer $\mathrm{Ker}\Delta_n$ et montrer que $\mathrm{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1 ☛ $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathrm{Ker}(\Delta) \cap \mathbb{R}_n[X] = \boxed{\mathbb{R}_0[X]}$.

☛ On a vu : $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'où $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Im}(\Delta_n) &= \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim \mathrm{Ker}(\Delta_n) \\
&= n + 1 - 1 = n \\
&= \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]
\end{aligned}$$

2 Récapitulons, on a : $\begin{cases} \mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ \dim \mathrm{Im}(\Delta_n) = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{cases}$.

On en déduit que : $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

5°) Montrer que l'endomorphisme Δ est surjectif.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si P est nul, $\Delta(1) = P$

1 Sinon, on note $p = \deg(P)$. Alors $P \in \mathbb{R}_p[X] = \mathrm{Im}(\Delta_{p+1})$.

Donc, $\exists Q \in \mathbb{R}_{p+1}[X], P = \Delta_{p+1}(Q) = \Delta(Q)$.

Donc, $\boxed{\Delta \text{ est surjective.}}$

6°) a) On considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = 0\}$.

Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathrm{Ker}\Delta$.

1 ☛ Montrons que F est un sev de $\mathbb{R}[X]$.
$F \subset \mathbb{R}[X]$ par définition de F.
$F \neq \varnothing$ car $0 \in F$.
Soit $(P,Q) \in F^2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0 \text{ car } (P,Q) \in F^2$$

Donc, $\lambda P + \mu Q \in F$.

Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$

☛ Montrons que : $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathrm{Ker}\Delta$.

➢ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} P \in F \cap \mathrm{Ker}(\Delta) &\iff P \in F \cap \mathbb{R}_0[X] \\ &\iff \begin{cases} P = \lambda & \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \\ P(0) = 0 \end{cases} \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

2 Donc, $\boxed{F \cap \mathrm{Ker}(\Delta) = \{0\}}$.

➢ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$P = \underbrace{P - P(0)}_{Q} + P(0)$$

$P(0) \in \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Ker}(\Delta)$ et $Q(0) = P(0) - P(0) = 0$ donc $Q \in F$.
D'où, $\boxed{\mathbb{R}[X] = F + \mathrm{Ker}\Delta}$

On en déduit que : $\boxed{\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathrm{Ker}\Delta}$.

b) Conclure que, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et que $\Delta(P) = Q$. Préciser le degré de P en fonction de celui de Q. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

☛ *Unicité :* Soient deux polynômes P_1 et P_2 tels que :

$$\begin{array}{ccc} \Delta(P_1) = Q & \qquad & \Delta(P_2) = Q \\ P_1(0) = 0 & & P_2(0) = 0 \end{array}$$

On pose $R = P_1 - P_2$. Alors, $R(0) = P_1(0) - P_2(0) = 0$.
De plus,

2
$$\begin{aligned} \Delta(R) &= \Delta(P_1 - P_2) \\ &= \Delta(P_1) - \Delta(P_2) && \text{par linéarité de } \Delta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $R \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ donc R est constant. Comme $R(0) = 0$, R est le polynôme nul. D'où $P_1 = P_2$.
D'où l'unicité.

☛ *Existence :* Δ est surjective donc $\exists P_1 \in \mathbb{R}[X], Q = \Delta(P_1)$
Par la question précédente, $P_1 = P + \lambda$ où $P \in F$ ie $P(0) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2

$$\begin{aligned} Q &= \Delta(P_1) \\ &= \Delta(P+\lambda) \\ &= \Delta(P) + \Delta(\lambda) && \text{par linéarité de } \Delta \\ &= \Delta(P) \text{ car } \lambda \in \mathrm{Ker}(\Delta) \end{aligned}$$

On a bien trouvé $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $\Delta(P) = Q$.

On a prouvé que :

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists! P \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} \Delta(P) = Q \\ P(0) = 0 \end{cases}}$$

1 De plus, $\deg(P) = \deg(Q) + 1$ si $Q \neq 0$. Si $Q = 0$ alors $P = 0$.

B) Étude d'une suite de polynômes

1°) Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(0) = 0$ et $P_{n-1} = \Delta(P_n)$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n : \exists!(P_1, ..., P_n) \in \mathbb{R}[X]^n, \forall i \in [1, n], P_i(0) = 0$ et $P_{i-1} = \Delta(P_i)$.

☛ Pour $n = 1$. On cherche $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\begin{cases} P_1(0) = 0 \\ 1 = \Delta(P_1) \end{cases}$.

$P_1 = X$ convient. L'unicité est assurée par 6b.

3 ☛ On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}^*$.

On cherche un polynôme P_{n+1} tel que : $\begin{cases} P_{n+1}(0) = 0 \\ P_n = \Delta(P_{n+1}) \end{cases}$.

D'après 6b, ce problème a une unique solution (le polynôme P_n joue le rôle du polynôme Q).

2°) Expliciter P_1 et P_2.

$P_1 = X$.

P_2 vérifie : $\begin{cases} P_2(0) = 0 \\ \Delta(P_2) = X \end{cases}$.

$\deg(P_2) = 2$ donc P_2 s'écrit $P_2 = aX^2 + bX + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

$P_2(0) = 0$ donc $c = 0$.

1

$$\begin{aligned} \Delta(P_2) = X &\iff a((X+1)^2 - X^2) + b(X+1-X) = X \\ &\iff a(2X+1) + b = X \\ &\iff 2Xa + a + b = X \\ &\iff 2a = 1, a + b = 0 \\ &\iff a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{X(X-1)}{2}}$.

3°) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

On pose : $R_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

On a : $R_n(0) = 0$.
De plus,

2

$$\begin{aligned}\Delta(R_n) &= \frac{(X+1)X\cdots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}\\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-n+2)}{n!}(X+1-(X-n+1))\\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-n+2)}{(n-1)!}\\ &= R_{n-1}\end{aligned}$$

Or, par unicité de la suite (P_n), on en déduit que : $\boxed{P_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}}$.

4°) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On remarque que : $\forall i \in [0, n], \deg(P_i) = i$.

2 Ainsi, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré donc elle forme une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Or elle a $n+1$ éléments et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.

Donc, $\boxed{(P_0, \ldots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

5°) Expliciter alors les monômes X^2 et X^3 comme combinaisons linéaires de P_0, P_1, P_2 et P_3.

1 ☛ $P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = \dfrac{X^2 - X}{2}$.
On en déduit : $\boxed{X^2 = 2P_2 + P_1}$.

1 ☛ $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = \dfrac{X^2 - X}{2}, P_3 = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6} = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 2X}{6}$.
D'où,

$$\begin{aligned}X^3 &= 6P_3 + 3X^2 - 2X\\ &= 6P_3 + 3(2P_2 + P_1) - 2P_1\\ &= \boxed{6P_3 + 6P_2 + P_1}\end{aligned}$$

6°) **Application :** Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls, on pose

$$S_{n,p} = 1^n + 2^n + \cdots + p^n$$

a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $A_n(0) = 0$ et $\Delta(A_n) = X^n$.

D'après la première partie 6b, en posant $Q = X^n$.

1

$$\exists! A_n \in \mathbb{R}[X], \begin{cases}\Delta(A_n) = X^n\\ A_n(0) = 0\end{cases}$$

De plus, $\deg(A_n) = \deg(X^n) + 1 = n + 1$.

b) En revenant à la définition de Δ, montrer que $S_{n,p} = A_n(p+1)$.

On a : $A_n(X+1) - A_n(X) = X^n$. D'où, $\forall k \in [0, p], A_n(k+1) - A_n(k) = k^n$.
On somme de $k = 0$ à $k = p$.

2

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} A_n(k+1) - A_n(k) &= \sum_{k=0}^{p} k^n\\ A_n(p+1) - A_n(0) &= \sum_{k=0}^{p} k^n\\ A_n(p+1) &= \boxed{S_{n,p}}\end{aligned}$$

c) Si $X^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, justifier que $A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}$.

Supposons : $X^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$. On pose : $B_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}$.

On a bien : $B_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}(0) = 0$. De plus,

2

$$\begin{aligned}\Delta(B_n) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta(P_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k \\ &= X^n\end{aligned}$$

Par unicité du polynôme A_n, on a : $\boxed{A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}}$.

d) Déterminer les valeurs de A_2 et A_3.

On a vu : $X^2 = 2P_2 + P_1$. Donc, $\boxed{A_2 = 2P_3 + P_2}$.

1 On a vu : $X^3 = 6P_3 + 6P_2 + 6P_1$. Donc, $\boxed{A_3 = 6P_4 + 6P_3 + P_2}$.

e) Donner alors, sous forme factorisée, les valeurs de $S_{2,p}$ et $S_{3,p}$. On a :

1

$$\begin{aligned}S_{2,p} &= A_2(p+1) \\ &= 2 \times \frac{(p+1)p(p-1)}{6} + \frac{p(p+1)}{2} \\ &= \frac{p(p+1)}{6}(2(p-1)+3) \\ &= \boxed{\frac{(p+1)p(2p+1)}{6}}\end{aligned}$$

De même :

1

$$\begin{aligned}S_{3,p} &= A_3(p+1) \\ &= \frac{6(p+1)p(p-1)(p-2)}{24} + \frac{6(p+1)p(p-1)}{6} + \frac{p(p+1)}{2} \\ &= \frac{p(p+1)}{4}((p-1)(p-2) + 4(p-1) + 2) \\ &= \frac{p(p+1)}{4}(p^2 - 3p + 2 + 4p - 4 + 2) \\ &= \frac{p(p+1)p(p^2+p)}{4} \\ &= \boxed{\frac{p^2(p+1)^2}{4}}\end{aligned}$$

/39

2 e problème :

1°) a) Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ? Justifier.

1 Une matrice nilpotente n'est pas inversible.
En effet, soit M une matrice nilpotente, d'indice p. On a alors $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.
Supposons M inversible alors $M^{p-1} = M^{-1}.M^p = 0$ c'est absurde.
Donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible.}}$

b) Un exemple : Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que A et B sont nilpotentes.
Prouver que $A + B$ est inversible.
Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $(AB)^k$.
Les matrices $A + B$ et AB sont-elles nilpotentes ?

➢ Calculons $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Donc $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$

1 ➢ De même $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Donc $\boxed{B \text{ est nilpotente.}}$

1 ➢ On a $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 Il est clair que $\text{rg}(A+B) = 2$ puisque ses deux colonnes ne sont pas colinéaires. Donc $A + B$ est inversible. On en déduit donc que $\boxed{A + B \text{ n'est pas nilpotente}}$.

➢ Calculons $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Puis $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Par récurrence immédiate, $(AB)^k = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$.

Ainsi $\boxed{(AB) \text{ n'est pas nilpotente.}}$

c) Retour au cas général :
Soient A et B nilpotentes qui commutent (c'est-à-dire $AB = BA$). Montrer AB et $A + B$ sont nilpotentes.

Notons p l'indice de nilpotence de A et q celui de B.

1 ➢ Pour $r = \min(p, q)$. On a $(AB)^r = A^r B^r = 0$ car A et B commutent et $A^r = 0$ ou $B^r = 0$. Donc $\boxed{AB \text{ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à } r = \min(p, q).}$

➢ Calculons maintenant $(A+B)^{p+q}$ par la formule du binôme puisque A et B commutent.

3

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k \underbrace{B^{p+q-k}}_{=0 \text{ car } p+q-k \geqslant q} + \sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} \underbrace{A^k}_{=0 \text{ car } k \geqslant p} B^{p+q-k} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ainsi $\boxed{A + B \text{ est nilpotente et son indice est inférieur à } p + q.}$

2°) Soit M une matrice nilpotente d'indice p de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier qu'il existe un vecteur X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^{p-1}X \neq 0$.

1 Comme $M^{p-1} \neq 0$, alors il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), M^{p-1}X \neq 0$.

b) Montrer la famille $\mathcal{F} = (X, MX, M^2X, \ldots, M^{p-1}X)$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k M^k X = 0$.

Multiplions par M^{p-1} : en tenant compte que $M^k = 0$ pour $k \geqslant p$, on obtient :

2 $\lambda_0 M^{p-1}X = 0$ donc $\lambda_0 = 0$ puisque $M^{p-1}X \neq 0$.

On a donc maintenant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k M^k X = 0$. On multiplie par M^{p-2} et on obtient $\lambda_1 = 0$.

Par récurrence, on obtient alors $\forall 0 \leqslant k \leqslant p-1, \lambda_k = 0$. $\boxed{\text{La famille est donc libre.}}$

c) Que peut-on en déduire sur p et n ?

1 Comme la famille précédente est libre et de cardinal p, on a : $\boxed{p \leqslant \dim M_{n,1}(\mathbb{R}) = n.}$

d) Montrer $M^n = 0$

1 Comme $n \geqslant p$ et $M^p = 0$, on a $\boxed{M^n = 0.}$

3°) Soit M une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$

Développer $(I_n - M)(I_n + M + \cdots + M^{n-1})$.

En déduire que les matrices $(I_n - M)$ est inversible et calculer son inverse.

Qu'en est-il de $I_n + M$?

Il est clair : $(I_n - M)(I_n + M + \cdots + M^{n-1}) = I_n - M^n = I_n$ puisque M est nilpotente.

Donc $\boxed{(I_n - M) \text{ est inversible et son inverse est } (I_n + M + \cdots + M^{n-1})}$.

2 Si M est nilpotente alors $-M$ aussi donc en remplaçant M par $-M$ dans le calcul précédent, on obtient que $\boxed{I_n + M \text{ est inversible et son inverse est } \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k M^k.}$

4°) Pour toute matrice nilpotente M de $M_n(\mathbb{R})$. On définit la matrice :

$$e(M) = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}M^{n-1}$$

a) Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer :$e(A+B) = e(A) \times e(B)$

Tout d'abord, on a vu que $A+B$ est nilpotente d'indice inférieur à la fois à $p+q$ (d'après 1c) et à n (d'après 2c).

On en déduit $e(A+B) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}(A+B)^i = \sum_{i=0}^{p+q} \frac{1}{i!}(A+B)^i$.

Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p+q}\frac{1}{k!}(A+B)^k &= \sum_{k=0}^{p+q}\frac{1}{k!}(A+B)^k\\
&= \sum_{k=0}^{p+q}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}A^iB^{k-i} && \text{car } A \text{ et } B \text{ commutent}\\
&= \sum_{k=0}^{p+q}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}A^iB^{k-i}\\
&= \sum_{i=0}^{p+q}\frac{1}{i!}A^i\left(\sum_{k=i}^{p+q}\frac{1}{(k-i)!}B^{k-i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{i!}A^i\left(\sum_{j=0}^{p+q-i}\frac{1}{j!}B^{j}\right) && \text{car } A^i=0 \text{ pour } i\geqslant p\\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{i!}A^i\left(\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{j!}B^{j}\right) && \text{car } B^j=0 \text{ pour } j\geqslant q\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}B^{j}\right) && \text{car } p\leqslant n, q\leqslant n\\
&= e(A)\times e(B)
\end{aligned}$$

Donc :

4 $$\boxed{e(A+B)=e(A)\times e(B)}$$

b) Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $e(A)$ est inversible et calculer son inverse.

On remarque que si A est nilpotente, $-A$ aussi.

1 La formule précédente donne : $e(A)e(-A)=e(0)=I_n$.

De même, $e(-A)e(A)=e(0)=I_n$.

Donc $e(A)$ est inversible et $(e(A))^{-1}=e(-A)$.

5°) Exemples :

a) Soit $A=\begin{pmatrix}6&9\\-4&-6\end{pmatrix}$. Montrer que A est nilpotente et calculer $e(A)$.

Calculons : $A^2=\begin{pmatrix}6&9\\-4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&9\\-4&-6\end{pmatrix}=0$. Donc $\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice 2.}}$

On a alors $e(A)=I_2+A=\begin{pmatrix}7&9\\-4&-5\end{pmatrix}$.

2 On a $(e(A))^{-1}=e(-A)=I_2-A=\begin{pmatrix}-5&-9\\4&7\end{pmatrix}$.

b) Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\0&1&1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$.

Vérifier qu'il existe un unique α tel que A soit nilpotente. On prendra désormais cette valeur pour α.

Calculons :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix}1&1&\alpha\\0&1&1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\0&1&1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1-\alpha&2-\alpha&1-\alpha\\-1&0&-1\\1&0&3-\alpha\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Puis :

2
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2-\alpha & 1-\alpha \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2-\alpha & 2\alpha-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \\ \alpha-2 & \alpha-2 & 3\alpha-6 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $\boxed{A^2 \neq 0 \text{ et } A^3 = 0 \iff \alpha = 2.}$

Calculer $e(A)$ et son inverse.

Pour $\alpha = 2$, on a : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.

On obtient $e(A) = I_3 + A + \dfrac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1 On a : $(e(A))^{-1} = e(-A) = I_3 - A + \dfrac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

c) A tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe $D(P) = P'$.

i. Justifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1 Il est clair que D est linéaire. De plus si $\deg(P) \leqslant n$ alors $\deg(P') \leqslant n$.
Donc $\boxed{D \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

ii. Montrer que D est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son indice de nilpotence.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, comme $\deg(D(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & si \quad \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & sinon \end{cases}$.

2 On en déduit par récurrence immédiate :
$\deg(D^k)(P)) = \begin{cases} \deg(P) - k & si \quad \deg(P) \geqslant k \\ -\infty & sinon \end{cases}$.

Et en particulier, $D^{n+1}(P) = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi D est nilpotent.
Enfin, on a $D^n(X^n) = n! \neq 0$ donc $\boxed{D \text{ est nilpotent d'indice } n+1.}$

iii. On notera $P_0 = 1$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \dfrac{X^i}{i!}$.

Justifier que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E.

2 La famille $\mathcal{B}$ est une famille de degré échelonné de $\mathbb{R}_n[X]$: elle est donc libre.

En effet : Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$.

On en déduit : $\lambda_n P_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i P_i$. On en déduit : $\deg(-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i P_i) \leqslant n - 1$.

Si $\lambda_n \neq 0$, c'est absurde car $\deg(P_n) = 0$. Donc $\lambda_n = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i P_i = 0$.

Par récurrence, on obtient : $\forall i \in [\![0, n]\!], \lambda_i = 0$. La famille est bien libre.

De plus, elle est de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. $\boxed{\text{C'est donc une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

Soient i et k deux entiers de $[\![1, n]\!]$, préciser $D^k(P_i)$.

2 On a pour $i \in [\![1, n]\!]$, $D(P_i) = P_{i-1}$ et $D(P_0) = 0$.

On en déduit par récurrence immédiate : $D^k(P_i) = \begin{cases} P_{i-k} & \text{si} \quad i \geqslant k \\ 0 & \text{si} \quad i < k \end{cases}$

iv. Soit l'endomorphisme $S = I_d + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \cdots + \frac{1}{n!}D^n$
Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], S(P(X)) = P(X+1)$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Calculons $S(P_i)$.

➢ Pour $i = 0$. $S(P_0) = P_0 = P_0(X+1)$ car $\forall k \geqslant 1, D^k(P_0) = 0$.

➢ Soit $i \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
S(P_i) &= (I_d + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \cdots + \frac{1}{n!}D^n)(P_i) \\
&= P_i + \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k!} D^k(P_i) \\
&= \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!} P_{i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!} \frac{1}{(i-k)!} X^{i-k} \\
&= \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} X^{i-k} \\
&= \frac{1}{i!}(X+1)^i \\
&= P_i(X+1)
\end{aligned}$$

3 Comme les deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, S et $P \mapsto P(X+1)$ coïncident sur la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, il sont égaux.

/37

/79